# SCELTA DI MODELLI

APPLICATI ALL' INSEGNAMENTO

## DEL DISEGNO DELLE MACCHINE

# SCELTA
# DI MODELLI

APPLICATI ALL' INSEGNAMENTO

## DEL DISEGNO DELLE MACCHINE

CON TESTO DESCRITTIVO

OPERA ADOTTATA DAL CONSERVATORIO REALE DELLE ARTI E MESTIERI, E DALLA SCUOLA CENTRALE DELLE ARTI E MANIFATTURE DI PARIGI

PER

**LE BLANC**

Membro della Legione di onore, Professore al Conservatorio Reale delle Arti e Mestieri, conservatore delle collezioni; membro della Scuola d'Incoraggiamento per l'industria nazionale della societa industriale di Mulhausen ec. ec.

TRADUZIONE

*Di Errico Gambardella*

con note ed aggiunte del traduttore

**NAPOLI**
STAMPERIA E CARTIERE DEL FIBRENO
Strada Trinità Maggiore N.° 26
1855

A S. A. I. R.

*Vice Ammiraglio Presidente*
*del Consiglio d'Ammiragliato*

**Altezza Reale**

*Il disegno delle macchine, attesa la estrema sua importanza, non poteva non attrarre lo sguardo benigno e confortatore di V. A. R. si degna interprete e rappresentante, nel ramo della Real Marina, dei voleri dell'Eccelso Monarca che ne regge. Perciò l'A. V. R. degnavasi incoraggiare il mio umile ingegno a perseguire nella intrapresa via della pubblicazione di una versione dell'opera di* Le Blanc, *ed è*

*per l'alto suo patrocinio se uno sguardo benigno è sceso dall'alto del Trono ad incorarmi nella mia intrapresa.*

*A chi dunque, se non all'A. V. R., io ricorrerò per munirla di fausti e confortevoli auspicii or che quest'opera è per darsi alla luce! Devozione, tenerezza, gratitudine mi spingono a mettere ai piedi di V. A. R. il lavoro tale qual esso è, e a supplicarla di concedergli il*

*vanto di portare in fronte il glorioso Suo Nome.*

*Che se povero è il mio merito per tanta grazia, mi valga almeno e la reputazione dell'opera che ò scelto, e l'importanza dello scopo al quale ò mirato; e lo amore e la devozione con cui mi uscrivo a gloria di segnarmi,*

*Di V. A. R.*

*Umilis.mo Dev.mo Obb.mo Servitore*
*Errico Gambardella.*

## PREFAZIONE DEL TRADUTTORE

*Nell' intraprendere la versione di quest' opera, ho avuto in mira tanto la necessità della traduzione quanto il miglioramento di essa sotto i due rapporti, scientifico ed economico.*

*Ed in fatti, se egli è vero che il francese idioma è divenuto tanto comune all' Italia da essere universalmente compreso non solo, ma ancora da imbastardirne la favella, egli è vero altresì che lo scientifico, e segnatamente matematico, linguaggio abbisogna di tal precisione di senso che altri, a meno che ben provetto sia nelle due lingue, mal può l' una all' altra sostituire. Così, non è già un' opera di questo genere quella che non ha bisogno di traduzione. Avrei creduto inoltre la fatica ben poco proporzionata allo scopo là dove non avessi avuto ad offrire in questa traduzione delle aggiunte e delle annotazioni colle corrispondenti tavole, sia per la migliore intelligenza del testo o per la rettificazione di qualche suo passo, che per la nozione di ciò che dall' autore era stato tralasciato, o a quell' epoca ignorato; conciossiachè la meccanica si arricchisca tuttodì di tesori novelli. Se a questi due fini si aggiunga l' altro di rendere il costo libero dalle spese supplementarie che gravitano sui libri esteri, ed alla portata di tutti quelli che a questa carriera si addicono, si potrà valutare nel loro vero aspetto i motivi che mi determinarono all' intrapresa, ed i vantaggi che arrecar può a coloro pei quali fu principalmente incontrata.*

**N. B. Perchè il testo originale non venga alterato, e perchè al tempo stesso gli articoli aggiunti dal traduttore vengano collocati ove il bisogno lo richiede, si è creduto a proposito d'inserire le dette aggiunte ne' luoghi opportuni del testo medesimo, notandole con carattere simile a quello della presente annotazione.**

## DEFINIZIONI ELEMENTARI

Un trattato del disegno delle macchine non è certo una istituzione di geometria; e nulladimeno l'opera non ci sembra compiuta nel suo genere là dove debba andar priva dei preliminari delle geometriche definizioni. L'esperienza ha mostrata la necessità di premettere alle trattazioni la spiega, non fosse altro che in riassunto, dei vocaboli e delle frasi scientifiche o tecniche che tratto tratto occorrono nel corso di un lavoro. Senza di che, l'opera venendo edita per lo vantaggio dei provetti nelle scienze non solo, ma anche, e forse principalmente, per quello dei poco regolarmente instrutti nelle discipline esatte, e che pur si trovano nella necessità di proiettar linee e tracciar curve, non si deve mettere il discente nella necessità di tener di continuo altri libri alla mano. Preluderemo quindi ai *Problemi*, coi quali l'Autore dà principio alla sua opera, con un quadro sommario ma compiuto delle definizioni della geometria elementare.

*

Dicesi Geometria la scienza che si occupa della misura e delle proprietà dell'estensione.

Per estensione s'intende tutto ciò ch'è dotato di lunghezza, larghezza e profondità.

I corpi altro non sono che una estensione terminata.

Linea è tutto ciò che ha una sola dimensione, come p. es. la lunghezza.

Superficie è ciò che ha due dimensioni, come p. es. lunghezza e larghezza. Le linee sono il termine delle superficie, e queste lo sono de'solidi o corpi.

Le linee si dividono in linee rette, linee cnrve, linee spezzate e linee miste.

La linea retta è il più corto cammino fra due pnnti.

La linea curva è quella che non è retta nè composta da linee rette.

La linea spezzata è quella ch' è composta da varie rette.

La linea mista è quella ch'è composta da rette e curve.

Così la A B (Tav. 1 fig. 1) è una linea retta, la C D E (fig. 2) è una linea cnrva, la E F G H (fig. 3) è una linea spezzata, e la M N P Q R (figura 4) è nna linea mista.

Le superficie si distinguono in piane, curve e miste.

La superficie piana, o piano, dicesi quella superficie sulla quale si può adattare in ogni senso nna linea retta.

La superficie curva è quella che non è piana.

La snperficie mista è quella che si compone in parte di superficie piane ed in parte di superficie cnrve.

Allorchè due linee rette s'incontrano in un punto dicesi che formano angolo, intendendosi perciò per angolo quella maggiore o minore quantità për la quale esse distano l'una dall'altra.

Così la linea A B (fig. 5) incontrando la C D forma da una parte l'an-

golo A B D e dall'altra l'angolo A B C; e questi angoli diconsi adiacenti.

Se accada che la A B (fig. 6) incontrando la C D formi i due angoli adiacenti eguali fra loro, si dice che questi angoli sono retti, e le linee A B e C D diconsi perpendicolari fra loro.

Ogni angolo maggiore del retto dicesi ottuso, ed acuto ogni altro che ne fosse minore.

Così A B C (fig. 7) è un angolo ottuso, e D E F (fig. 8) è un angolo acuto.

Le rette che col loro incontro formano l'angolo, diconsi lati di esso; ed il punto d'incontro chiamasi vertice.

Se due rette situate in uno stesso piano non s'incontrano mai da qualunque parte si prolunghino, diconsi parallele.

Così le due rette (fig. 9) A B e C D sono due parallele.

Figura in generale dicesi uno spazio terminato.

Figura piana poi vien detta una superficie piana terminata da qualsivoglia linea; distinguendosi col nome di figura piana rettilinea quella che ha per contorno linee rette, curvilinea quella che ha per contorno linee curve e mistilinea quella che ha per contorno linee rette e linee curve.

Triangolo dicesi quella figura piana terminata da tre linee rette, come p. es. A B C (fig. 10).

Le linee A B, A C, B C chiamansi lati del triangolo, ed i punti A, B, C ne costituiscono i vertici. Ed in generale, vengono detti lati di una figura piana le linee che ne compongono il contorno o perimetro, e vertici i punti d'incontro di questi lati.

Se i lati del triangolo sono tutti eguali fra loro il triangolo dicesi equilatero; se due soli lati sono eguali, il triangolo vien detto isoscele; e se in fine i tre lati sono tutti disuguali, esso acquista il nome di scaleno.

Quanto agli angoli poi, il triangolo vien detto ottusangolo, rettangolo,

acutangolo, secondo che ha un angolo ottuso, un angolo retto, ovvero tutti e tre gli angoli acuti.

Così A B C (fig. 11) è un triangolo equilatero; A B C (fig. 12) è un triangolo isoscele; A B C (fig. 13) è un triangolo scaleno; e di essi il primo è acutangolo, il secondo rettangolo, ed il terzo ottusangolo. Nel triangolo rettangolo si denominano cateti i due lati che comprendono l'angolo retto, ed ipotenusa il lato ad esso opposto.

Si chiamano quadrilateri, o poligoni di quattro lati, le figure piane terminate da quattro linee rette.

Fra' quadrilateri se ne distinguono cinque che hanno ricevuto nomi particolari: essi sono.

Il quadrato ch'è quel quadrilatero di cui i lati sono uguali e gli angoli retti, come A B C D (fig. 14).

Il rettangolo che ha solo gli angoli retti come A B C D (fig. 15).

Il parallelogrammo che ha i lati opposti paralleli come A B C D (figura 16).

La losanga che oltre ad avere i lati opposti paralleli ha ancora i quattro lati eguali fra loro, come A B C D (fig. 17).

Il trapezio che ha soltanto due lati opposti paralleli, come A B C D, (fig. 18).

Le figure di cinque lati vengono chiamate pentagoni, quelle di sei esagoni, quelle di sette ettagoni, quelle di otto ottagoni, ec.

Poligoni regolari diconsi quelli che sono equilateri ed equiangoli.

Cerchio dicesi una figura piana terminata da una linea curva di cui ogni punto è egualmente distante da un punto interno. La linea curva che termina il cerchio si chiama circonferenza, ed il punto interno vien detto centro. Così (fig. 19) A B C D è un cerchio, del quale O è il centro e la linea A B C D è la circonferenza.

Tutte le rette siccome O B, O C (fig. 19) che partono dal centro e si arrestano alla circonferenza chiamansi raggi, e diametri vengono chiamate tutte le rette le quali, siccome la A D, passano pel centro e sono terminate dalla circonferenza. È evidente poi che tutt'i raggi e tutt'i diametri di uno stesso cerchio sono eguali fra loro.

Una porzione della circonferenza dicesi arco.

Settore di cerchio si chiama quella porzione della superficie del cerchio ch'è terminata da due raggi e da un arco: così O A B (fig. 20) è un settore circolare.

Corda si chiama ogni retta, che unisce due punti della circonferenza come la C D (fig. 20).

La superficie C E D (fig. 20) terminata da un arco e da una corda dicesi segmento di cerchio.

Ogni retta che attraversa comunque un cerchio vien nominata secante: così la C D (fig. 21) è una secante del cerchio E K A I. Tangente di un cerchio si dice quella retta la quale non ha che un sol punto di comune col cerchio; e questo punto vien contraddistinto col nome di punto di contatto; così p. es. G H è tangente al cerchio A E B I, e K è il punto di contatto.

Poligono inscritto nel cerchio dicesi quello che ha i suoi vertici sulla circonferenza. Poligono circoscritto poi è quello che ha i suoi lati tangenti alla circonferenza: così A B C D E (fig. 22) è un poligono iscritto, ed F G H K L un poligono circoscritto.

## ISTRUMENTI FONDAMENTALI DI CUI SI FA USO NEL DISEGNO

Essendo a tutti noto cosa sia in generale una riga ed una squadra, non m'intratterrò in inutili descrizioni, ma verrò piuttosto a dare idea delle diverse specie di righe e di squadre; se non che la conoscenza delle diverse

squadre esigendo la nozione della misura degli angoli onde essere con più chiarezza intesa, così darò principio col descrivere cosa sia un rapportore, o semicerchio graduato di cui ci avvalghiamo a tal uopo.

Se un semicerchio, per lo più metallico, A B C (fig. 23) si divida alla circonferenza in 180 parti eguali, e ciascuna di queste parti si suddivida in altre 60 ancora eguali fra loro, si avrà ciò che chiamasi un rapportore o semicerchio graduato. Ciascuna delle 180 parti in cui si è dapprima divisa la circonferenza si denomina grado, e minuto primo poi vien detta ciascuna delle 60 seconde divisioni.

Per avvalersi di questo istrumento onde misurare gli angoli si operi nel seguente modo:

Si adatti il centro D del semicerchio graduato sul vertice dell'angolo da misurarsi, ed il raggio D C si faccia coincidere col lato D E dello stesso angolo proposto, osservando poi la divisione sulla quale cade il secondo lato D F di esso angolo, si giudicherà del numero di gradi e minuti primi che in esso si contengono.

Posto ciò, una squadra null'altro essendo che un triangolo rettangolo, così se i due angoli acuti sono ciascuno di 45 gradi o, come suole scriversi di 45°, essa prenderà il nome di squadra a 45°; se invece uno degli angoli è di 60° e l'altro per conseguenza di 30° essa si dirà squadra a 60°.

Per verificare se una squadra abbia esatto il suo angolo retto, si prenda una seconda squadra, dell'esattezza della quale si sia sicuro, e si faccia combaciare il lato (fig. 24) O A dell'una col lato O B dell'altra, ed i due lati O D ed O C si adattino su di una riga E P, se nel far combaciare questi lati colla riga, seguitano a restar coincidenti i due lati O B ed O A, si sarà sicuro della esattezza della squadra.

Non essendovi una squadra esatta di verifica, si proverà l'esattezza di una squadra qualunque descrivendo colla medesima un angolo retto. Vol-

tando poi la squadra dalla faccia opposta, si adatti con uno de'suoi lati sul lato dell'angolo retto tracciato, e facendo coincidere il vertice della squadra col vertice dell'angolo, se il lato libero forma una linea retta col lato libero dell'angolo stesso, la squadra sarà esatta.

Per verificare poi se una squadra sia a 45°, si vegga se i due lati perpendicolari sono eguali fra loro; se invece la squadra dovesse essere a 60°, dovrebbe il più piccolo de'cateti essere metà dell'ipotenusa.

Tra le righe descriverò la sola riga detta a T, la quale consiste in due righe usuali perpendicolari fra loro, siccome lo mostra la fig. 25, e delle quali la più corta A B si fa di una spessezza maggiore di quella della più lunga C D. Facendo combaciare la A B con uno dei lati di una tavoletta da disegno, e la C D con una delle facce della stessa, se si fa scorrere la A B lungo il lato sul quale si è adattata, la C D, trasportata essa pure, darà quante rette si vogliano parallele fra loro; e se si possegga una tavoletta esatta ne'suoi angoli retti, adattando la riga A B sul lato adiacente a quello sul quale era, si potranno disegnare altrettante linee rette perpendicolari alle prime.

Se all'estremo B (fig. 26) di un filo A B si sospenda un peso mentre l'altro capo è fisso, questo filo darà la direzione della verticale, o di una retta perpendicolare ad un piano orizzontale, intendendo per piano orizzontale quel piano secondo il quale si conforma la superficie di un liquido stagnante.

Per assicurarsi poi se un piano sia o pur no orizzontale si fa uso di diversi strumenti detti livelli, dei quali i principali sono quello a bolla d'aria, e quello a squadra. Il primo (fig. 27) consiste in un tubo di vetro che si assottiglia a misura che dal mezzo si va agli estremi, ripieno di un liquido, come p. es. d'acqua, in modo però da lasciarvi una bolla d'aria; se messo questo istrumento su di un piano si vede giacere la bolla d'aria nel mezzo del tubo si è certo che il piano è orizzontale.

Il secondo livello, così detto a squadra, consiste in una squadra a 45°, A B C ( Tavola 2 fig. 28 ) attraversata da una riga F G parallela alla ipotenusa A C, e nella quale è marcata con un trattolino la direzione della bisettrice dell'angolo retto A B C, al vertice del quale è legato un filo che porta un peso al suo estremo; se messo il lato A C su di un piano si avvera che la direzione del filo coincide col trattolino della F G il piano che si esperimenta sarà orizzontale.

Premesse tali cose, passiamo alla soluzione di alquanti problemi di geometria.

# DISEGNO DELLE MACCHINE

## ESERCIZII DI GEOMETRIA

### I. PROBLEMA FIGURA 29.

*Innalzare una perpendicolare sul punto medio di una retta.*

*Soluzione.* Dalle estremità A e B della retta data, con una apertura di compasso maggiore della metà di questa linea, si descrivano al di sopra e al disotto di essa degli archi di cerchio, che s'intersegheranno nei due punti C e D; la retta che li unirà sarà la perpendicolare cercata. È evidente che questa costruzione può anche servire per dividere una retta data in due parti eguali.

### II. PROBLEMA — FIGURA 30.

*Da un punto dato sopra una retta innalzare una perpendicolare ad essa.*

*Soluzione.* Si portino, a destra ed a sinistra del punto dato A, due distanze eguali A B, A C; poscia dai punti B e C come centri e con un raggio maggiore della metà della loro distanza, si descrivano due archi, che si taglieranno in D; la linea D A sarà la perpendicolare richiesta.

### III. PROBLEMA — FIGURA 31.

*Da un punto A dato fuori di una retta abbassare una perpendicolare a questa retta.*

*Soluzione.* Da questo punto considerato come centro, si descriva un cerchio con un raggio grande abbastanza perchè tagli la linea data in due punti F e G; di guisa che F G sia circa il doppio della distanza dal punto A alla retta. Dai nuovi punti F e G colla stessa lunghezza per raggio, o se si vuole, con un'altra che sia un poco più grande della metà di F G, si descrivano due archi che s'intersegheranno in E; la retta A E sarà perpendicolare ad F G.

### IV. PROBLEMA — FIGURA 32.

*Innalzare una perpendicolare dalla estremità A d'una retta A B che non si può prolungare.*

*I. Soluzione.* Da un punto qualunque C, preso per centro al di sopra di A B, si descriva una circonferenza che passi pel punto A; essa taglierà la linea data in E; si tiri C E che si prolungherà fino all'incontro della circonferenza in D, ed A D sarà la perpendicolare cercata.

*II. Soluzione.* Dall' estremità A (fig. 33) come centro con un'apertura di compasso abbastanza grande, si descriva l'arco di cerchio C E: si conservi la stessa apertura per descriverne un

secondo A C dall' intersezione E; indi mettendo una punta del compasso in C, ove questi due cerchi s'intersegano, e sempre collo stesso raggio, si descriva ancora l'arco D: tirando la retta E C prolungata fino a D, questo ultimo punto apparterrà alla perpendicolare A D.

### V. PROBLEMA — FIGURA 34.

*Per un punto conosciuto A tirare una parallela ad una retta data E F.*

*Soluzione.* Si prenda il punto A per centro e col maggiore raggio possibile si descriva l'arco D F; indi dal punto F colla stessa lunghezza si descriva anche l'altro E A; si porti infine la distanza E A da F in D mediante un arco di cerchio, se si tiri A D si avrà la parallela richiesta.

### VI. PROBLEMA — FIGURE 35 e 36.

*Dato un angolo qualunque E C F costruirne un altro che sia eguale ad esso.*

*Soluzione.* Si tiri una retta indefinita A B, e da un punto A, con un'apertura di compasso alquanto grande, si descriva l'arco B D. Dal vertice C dell'angolo dato se ne descriva un altro E F di egual raggio; si prenda in seguito la distanza E F e si porti da B in D; indi congiungendo A D, l'angolo D A B sarà eguale al primo.

## VII. PROBLEMA — FIGURA 37.

*Dividere l' angolo A C B in due parti eguali.*

*Soluzione.* Dal vertice C come centro, con un raggio preso a volontà, si descriva l'arco di cerchio A B. Dai punti A e B, con una lunghezza maggiore della metà della loro distanza, si traccino pure due altri archi; la retta C D che congiunge la loro intersezione D col punto C, dividerà l'angolo dato, non che l' arco A B, in due parti eguali.

## VIII. PROBLEMA — FIGURA 38.

*Dato un angolo retto A B C, dividerlo in tre parti eguali.*

*Soluzione.* Facciasi centro B, e con intervallo ad arbitrio si descriva l'arco di cerchio A D C. Indi col punto A come centro, e col medesimo raggio si descriva l' arco B E: e similmente col centro C e collo stesso intervallo si descriva l'arco D B. Congiungendo B D e B E si avrà l' angolo retto dato A B C diviso nei tre eguali fra loro A B D, D B E, E B C.

## IX. PROBLEMA — FIGURA 39.

*Dividere in due parti eguali un angolo*
*del quale non si ha il vertice.*

*Soluzione.* Dai punti E ed H presi sui lati dell' angolo dato s' innalzino delle perpendicolari a ciascuno di essi; vi si

portino delle lunghezze eguali E F, H G: conducendo pei punti F e G delle parallele ad A C e B C si formerà l'angolo F S G eguale al primo. Si faccia in prosieguo lo stesso di quello che si è praticato nella figura 37, e si otterrà la retta S D che dividerà l'angolo dato in due parti eguali.

### X. PROBLEMA — FIGURA 40.

*Essendo dati separatamente un angolo I C H ed i due lati adiacenti A e B di un parallelogrammo, costruire questa figura.*

*Soluzione.* Si tiri la retta indefinita D E, sulla quale si prenda una parte D E uguale al lato A. Si faccia al punto D, (fig. 35 e 36) l'angolo L D K eguale al dato, e sulla D L prolungata si tagli la porzione D F eguale all'altro lato B: indi col centro F e coll' intervallo A si descriva un arco di cerchio, e similmente col centro E ed intervallo B si descriva un altro arco. Il punto d' intersezione G di questi due archi si unisca con F ed E; la figura che ne risulta sarà il parallelogrammo richiesto.

Occorrendo non di rado nel disegno di dover ricorrere a divisione di rette in parti proporzionali ad altre rette, non crediamo inutile il premettere questi brevissimi cenni sulle proporzioni.

Lo scopo per lo quale due o più quantità della stessa natura si paragonano fra loro si è quello di avere un'idea della loro grandezza relativa; ora questa idea può aversi in due modi, o vedendo, cioè, di quanto la prima

supera o è superata dalla seconda, ovvero esaminando quante volte la prima contiene o è contenuta nella seconda. Così se a mò d'esempio si trattasse di due lunghezze, l'una di $15^m$ e l'altra di $5^m$, si potrà dire o che la prima supera la seconda di 10, ovvero che la prima contiene la seconda 3 volte; e nel primo caso l'idea della grandezza relativa delle due quantità ci vien somministrata dal numero 10 che è il resto della sottrazione di 5 da 15, e nel secondo ci vien data da 3 che è il quoziente della divisione di 15 per 5. Questi due metodi di paragone vengono contraddistinti con nomi diversi, chiamandosi *paragone, rapporto o ragione aritmetica* quel paragone che si fa per via di sottrazione, e dicendosi invece *rapporto o ragione geometrica* quel paragone che si fa per mezzo della divisione.

Per distinguere poi se il rapporto è geometrico od aritmetico, si scrivono le due quantità da paragonarsi, l'una accosto all'altra, interponendo fra esse due punti nel primo caso, ed uno nel secondo; così 15: 5 significa che il paragone che si fa fra 15 e 5 è per mezzo di divisione, ossia che la ragione è geometrica, e si legge 15 sta a 5; nel mentre che 15. 5 si legge nello stesso modo, ma vuol dire che il paragone è per mezzo di sottrazione, ovvero che la ragione è aritmetica. Le due quantità che si paragonano diconsi, in generale, termini della ragione, e in ispecie, antecedente quello che sta avanti e conseguente l'altro. Il quoziente 3 che si ha nel primo caso, ed il resto 10 che vien dato dal secondo diconsi *quantità di ragione.*

Da ciò può conchiudersi che una ragione geometrica altro non è che il quoziente di una divisione, la quale, potendo accennarsi per mezzo di una frazione, tanto sarà dire 15: 5 quanto $\frac{15}{5}$, ovvero 3 che è la quantità di ragione: dunque ogni ragione equivale ad una frazione, ed inversamente, ogni frazione può fornire una ragione.

Consideriamo ora le due ragioni 8: 4 e 20: 10, ed osserviamo che l'8 contenendo il 4 due volte, ed il 20 contenendo il 10 pure due volte, le due

ragioni 8: 4 e 20: 10 sono eguali fra loro, e costituiscono ciò che chiamasi una proporzione; sicchè proporzione altro non è che l'uguaglianza di due ragioni, e si suole scrivere separando le due ragioni con quattro punti, come segue: 8 : 4 :: 20: 10 e si legge 8 sta a 4 come 20 sta a 10; altri usano pure di scrivere la proporzione interponendo il segno di uguaglianza fra le due ragioni, cioè scrivendo p. es.: $8 : 4 = 20 : 10$; e poichè la ragione 8:4 equivale alla frazione $\frac{8}{4}$, e la ragione 20: 10 equivale all'altra $\frac{20}{10}$, essendo le due ragioni eguali fra loro, si ha $\frac{8}{4} = \frac{20}{10}$. Sicchè ogni proporzione altro non è che l'uguaglianza di due frazioni.

Tutto ciò che abbiam detto ragionando su'numeri, si applica facilmente alle quantità di qualunque natura, come alle linee, alle superficie, ed ai solidi, giacchè questi riduconsi a numeri allorchè si esegue la loro misura.

È facile ora intendere cosa vuol dire dividere una retta in parti proporzionali ad altre rette. In fatti se A B (figura 41) fosse la retta da dividersi, e C D, E F, G H ec., le rette alle quali debbono essere proporzionali le parti in cui si vuol dividere la A B, una tal quistione altro non vorrebbe significare se non che la A B deve dividersi in parti che abbiano fra loro la stessa ragione che le C D, E F, G H; cioè che la prima parte A K deve contenere la seconda K L, e la terza L B, tante volte quante la C D contiene la E F e contiene la G H.

## XI. PROBLEMA — FIGURA 42.

*Dividere una retta A B nello stesso rapporto che un'altra B G, cioè in modo che le parti della prima sieno proporzionali a quelle della seconda.*

*Soluzione.* Dopo aver tirata dallo estremo B, la retta B G sotto un angolo qualunque, e portate sopra di essa le divisioni

date, si unisca G A. Indi pe' punti F, E, D e C si conducano delle parallele a quest'ultima G A. Le rette B H, H I, I K ec. saranno proporzionali alle parti conosciute B C, C D ec. Se queste ultime fossero eguali, è evidente che le altre lo sarebbero del pari. Questa costruzione può dunque servire per dividere una retta data in parti eguali.

### XII. PROBLEMA — FIGURA 43.

*Far passare una circonferenza di cerchio per tre punti dati A, B, D non in linea retta.*

*Soluzione.* Si uniscano questi punti per mezzo delle rette A B, e B D, e dai punti medî delle stesse s' innalzino (fig. 29) delle perpendicolari. Il punto d' incontro C di queste perpendicolari è il centro del cerchio cercato; cosicchè, fatto centro C ed intervallo C A, si avrà il raggio col quale si potrà descrivere la circonferenza.

### XIII. PROBLEMA — FIGURA 44.

*Data la retta A B, costruire su di essa un quadrato.*

*Soluzione.* Dall' estremità di questa linea, colla sua lunghezza per raggio, si descrivano due archi di cerchio, che si taglieranno in F; si porti B F da F in E, si congiunga il punto E col punto B per mezzo della retta E B, che dividerà l'arco A F in due parti eguali nel punto G; e portando allora una di que-

ste parti da F in C ed in D, si tirino le rette A C, C D, e B D, e si avrà il quadrato richiesto.

## XIV. PROBLEMA — FIGURA 45.

*Inscrivere nel cerchio A B C D un quadrato.*

*Soluzione.* Si tirino i diametri A C e B D perpendicolari fra loro, e congiunti gli estremi per mezzo delle rette A D, D C, C B ed A B, si avrà il quadrato inscritto.

## XV. PROBLEMA — FIGURA 46.

*Inscrivere un pentagono regolare nel cerchio K I L.*

*Soluzione.* Si tirino due diametri K L ed I J che s'interseghino ad angolo retto, e col punto C, medio di O J per centro, e coll'intervallo C K si descriva l'arco D K. Col punto d'intersezione K come centro, ed intervallo K D si descriva l'arco D F: la corda che congiunge i punti F e K sarà il lato del pentagono. Innalzando dal punto medio di questa corda la perpendicolare D O, la corda K P sarà il lato del decagono inscritto nel cerchio dato.

## XVI. PROBLEMA. — FIGURA 47.

*Dato il cerchio A B C, inscrivere in esso un esagono regolare.*

*Soluzione.* Si prenda un punto qualunqne A della circonferenza come centro, ed intervallo eguale al raggio del cerchio dato, si descriverà un arco che intersegherà la circonferenza nel pnnto B. La corda A B portata successivamente sei volte sulla circonferenza, darà l'esagono cercato.

È chiaro che congiungendo i vertici dello esagono alternativamente si avrà il triangolo equilatero inscritto; e che dividendo gli archi A B, B C, C D ec. per metà nei punti G, H, ec., e congiungendo A G, G B, B H ec., si avrebbe il dodecagono regolare inscritto; e similmente si potrebbero avere i poligoni regolari di 24, di 48 ec. lati.

## XVII. PROBLEMA — TAVOLA 3. FIGURA 48.

***Dato il cerchio A B C E inscrivere in esso un pentedecagono regolare, ossia un poligono di quindici lati.***

*Soluzione.* Preso un punto A ad arbitrio, si tiri la corda A B uguale al lato del decagono, e per lo stesso punto A si tiri l'altra corda A C uguale al lato dell'esagono, si avranno così i due punti B e C; la loro congiungente B C è il lato del pentedecagono che, portato quindici volte successivamente sulla circonferenza, darà il poligono cercato. Dividendo l'arco B C per metà in D, si avrà il lato C D del poligono di 30 lati; e similmente si otterranno i lati dei poligoni di 60, di 120 ec. lati.

## XVIII. PROBLEMA — FIGURE 49 e 50.

*Costruire sulla retta data E F un rettangolo equivalente* (1) *al dato A B C D.*

*Soluzione.* Si faccia un angolo qualunque K I N; si porti la retta data sovra uno de' lati da I in M, e la base A B da I in N; infine l'altezza A D sull'altro lato da I in L; si congiunga M L, e si tiri pel punto N la parallela N K; la lunghez-

(1) Le figure equivalenti sono quelle che hanno uguali superficie.

za I K sarà l'altezza del rettangolo, che è facile costruirsi per mezzo del problema X (figura 40), osservando che l'angolo dato è retto.

### XIX. PROBLEMA — FIGURA 51.

*Dato il rettangolo A B E F, costruire un quadrato equivalente ad esso.*

*Soluzione.* Si prolunghi la base di questo rettangolo e si porti la sua altezza A F da A in C; dal punto medio di C B come centro, si descriva la semicirconferenza C D B; prolungando la perpendicolare A F fino a D, la lunghezza A D sarà il lato del quadrato richiesto.

### XX. PROBLEMA — FIGURA 52.

*Tirare una tangente ad una circonferenza di cerchio da un punto A preso su di essa.*

*Soluzione.* Si tiri il raggio A C; e dal punto A s'innalzi su di esso (per mezzo di uno de' primi problemi esposti nella tavola 2) la perpendicolare F G che sarà la tangente cercata.

### XXI. PROBLEMA — FIGURA 53.

*Per un punto A dato fuori della circonferenza E B F tirare ad essa delle tangenti.*

*Soluzione.* Si congiunga il punto A col centro C del cer-

chio, e dal mezzo D di A C, con un raggio eguale alla metà di questa linea, si descriva la circonferenza A F B che taglierà la prima ai punti B ed F; la retta A B sarà una delle tangenti cercate, ed A F sarà la seconda.

### XXII. PROBLEMA — FIGURA 54.

*Descrivere una circonferenza di cerchio che abbia per centro il punto dato B, e che tocchi la circonferenza data A D E.*

*Soluzione*. Si unisca C B e si otterrà in tal guisa il raggio A B col quale si descriverà la circonferenza A F G (1).

Se il punto B (fig. 56) si trovasse nell'interno del cerchio dato, si opererebbe assolutamente al modo stesso, osservando solo che il punto di contatto A si troverebbe sul prolungamento di B C in vece di essere fra i due centri, come nella figura precedente (2).

### XXIII. PROBLEMA — FIGURA 58.

*Tirare delle tangenti a due circonferenze date.*

*Soluzione*. Tirate indefinitamente la linea A B che congiunge i centri, e due raggi A D e B E paralleli e similmente

(1) La A C (figura 55) prolungata fino ad incontrare la circonferenza in D dà un secondo raggio A D col quale si può descrivere un secondo cerchio D E F che parimente soddisfa alla quistione.

(2) La stessa riflessione cade in acconcio per questo secondo caso, descrivendo un secondo cerchio col centro A ed intervallo A D ( figura 57 ).

posti; unite i loro estremi colla retta D E, che prolungata incontrerà A B in C; se da questo punto d'intersezione si tirano due tangenti ad uno dei cerchi col processo dato (fig. 53) esse lo saranno pure al secondo cerchio.

Potrebbe accadere che la A B non si potesse sufficientemente prolungare, ovvero che i diametri dei due cerchi fossero pressochè eguali, di guisa che la retta D E formasse con A C un angolo tanto acuto da non poter determinare esattamente il punto C; in tal caso si farà uso del metodo seguente.

Nel cerchio più grande C H E (fig. 59) si tiri un raggio qualunque A H dal quale taglisi da H in A la parte H G uguale a B D, indi col centro A ed intervallo A G, ch'è la differenza dei due raggi, descrivasi il cerchio I G K, al quale si tireranno le due tangenti dal punto B. Poscia dai centri A e B s'innalzino su di esse delle perpendicolari, e congiungendo C D ed E F si avranno le tangenti cercate (1).

(1) Se i due cerchi dati fossero perfettamente eguali e si volessero le tangenti comuni ad essi, basterebbe unire i centri A e B (figura 60) ed innalzare le perpendicolari E G, H F alla A B. Unendo E F e G H sarebbero queste le tangenti.

Questo problema ammette un'altra soluzione che consiste in una seconda coppia di tangenti come E D, C F (figura 61) condotte pel punto G esistente fra i due centri A, e B. Per ottenere questa seconda coppia si uniscano i centri e si divida la distanza fra essi A B in parti proporzionali a'raggi A C e B D dei due cerchi dati, si avrà così il punto G, pel quale conducendo le tangenti ad uno dei cerchi, queste risulteranno tangenti anche all'altro.

## XXIV. PROBLEMA — FIGURA 62.

*Date due rette A B e C D non parallele, descrivere dei cerchi tangenti fra loro ed a queste rette.*

*Soluzione.* Si osservi dapprima che tutti i centri si troveranno sulla N O che divide l'angolo delle due rette in due parti eguali. Ciò posto, da un punto B dato su questa linea si conduca una perpendicolare ad A B, e col raggio P B si descriva il primo cerchio E B D; è evidente che il secondo dovrà toccare quest' ultimo in E; da questo punto s'innalzi la perpendicolare E F sulla N O, di poi ottenendo il punto G per mezzo dell' arco descritto col centro F ed intervallo E F, si conduca G H parallela a B P. Il punto H sarà il centro del secondo cerchio richiesto I G E. È chiaro che ripetendo la medesima costruzione si perverrà a tracciare un terzo cerchio tangente al secondo in I.

## XXV. PROBLEMA—FIGURA 63.

*Inscrivere un cerchio in un triangolo A B D.*

*Soluzione.* Dividendo gli angoli A e B per metà (figura 37) si otterranno due rette che s' intersegheranno in G, centro del cerchio cercato; abbassando da questo punto la perpendicolare C G sulla A B, sarà questa il raggio del cerchio tangente ai tre lati del triangolo dato.

### XXVI. PROBLEMA — FIGURA 64.

*Descrivere due archi di cerchio tangenti fra loro, dei quali uno tocchi la A B in A, e l'altro la parallela ad essa C D in C.*

*Soluzione.* Dai punti A e C si tirino sulle rette date le perpendicolari indefinite A I, e C G; si tiri di poi A C, che si dividerà in due parti eguali nel punto E; dai punti medî H ed F di queste parti s'innalzino due altre perpendicolari, le cui intersezioni colle prime determineranno i centri I e G degli archi cercati, che si descriveranno col raggio G C o I A. Il loro punto di contatto trovasi evidentemente in E, medio di A C. Questa curva, che spesso presentasi in disegno, vien chiamata Gola dritta (*Cimaise*).

### XXVII. PROBLEMA — FIGURA 65.

*Costruire la curva detta Gola rovescia (Talon) fra le due parallele A B e C D, e che passi per i punti A e C.*

*Soluzione.* Si congiunga A C e dividasi per metà in E; dai punti medî F e G di ciascuna di queste parti s'innalzino le perpendicolari che intersecheranno le rette date in B e D; se da questi punti come centri, e col raggio A B o C D, si descrivano due archi di cerchio, essi formeranno la curva cercata.

## XXVIII. PROBLEMA — FIGURA 66.

*Raccordare per mezzo di un arco di cerchio di dato raggio la retta I H col cerchio A B D.*

*Soluzione.* Dopo aver tirato ad arbitrio il raggio CB, si tagli sul suo prolungamento da B in E il raggio dato, e col centro C ed intervallo C E descrivasi l'arco E F. Da un punto qualunque H della retta data s'innalzi una perpendicolare, che si prolungherà di tanto finchè sia eguale al raggio dato B E; indi conducendo pel punto G la parallela G F ad H I, questa incontrerà l'arco E F nel punto F, centro dell'arco proposto.

Se si tiri il raggio C F e la perpendicolare F I, si avranno in A ed in I i punti di contatto di questo arco col cerchio e colla retta (1).

(1) Generalmente, la parallela G F ad H I (figura 67 *Tavola 4.*) incontra l'arco E F in due punti E ed F, i quali sono entrambi atti a soddisfare il problema. Si deve inoltre osservare che, per essere il problema possibile, è mestieri che il raggio dato sia maggiore od eguale alla metà di K L, cioè che, abbassando dal centro la perpendicolare sulla retta data, il raggio proposto dev'essere eguale o maggiore della metà di quella porzione della perpendicolare compresa fra il suo piede e la circonferenza del cerchio dato; chè se le fosse propriamente eguale, allora le due soluzioni si ridurrebbero ad una.

### XXIX. PROBLEMA — FIGURA 68.

*Trovare il centro ed il raggio di un arco di cerchio tangente ad una retta D E, e che tocchi in A la circonferenza A B.*

*Soluzione*. È chiaro che il centro dev' essere situato sul prolungamento del raggio C A ad eguale distanza dal punto A e dalla retta data; se dunque si tiri la tangente A D, e dividasi per metà l'angolo A D E per mezzo della retta D F, si avrà il punto F che sarà il centro, ed F A il raggio richiesti dell'arco; il punto E, piede della perpendicolare F E, sarà il punto di contatto della retta data coll'arco richiesto.

### XXX. PROBLEMA — FIGURA 69.

*Tracciare un arco di cerchio tangente alle due circonferenze A B D ed F G; di cui il centro sia situato sul raggio E F prolungato.*

*Soluzione*. Dopo di aver portato il raggio del cerchio maggiore A B D da F verso H, si tiri la retta C H, dal punto medio della quale si eleverà una perpendicolare; questa incontrerà in I la retta E F prolungata; il punto I e la retta I F saranno il centro ed il raggio dell'arco tangente in A alla circonferenza A B D, ed in F all'altra F G.

### XXXI. PROBLEMA — FIGURA 70.

*Raccordare le rette A B e D E con un arco di cerchio obbligato a passare per un punto F situato sulla linea C F che divide in due parti eguali l'angolo formato dalle due rette.*

*Soluzione.* Dal punto F si conduca la perpendicolare A D a C F, e si dividano gli angoli B A D ed A D E in due parti uguali con due linee la cui intersezione comune C con C F sarà il centro del cerchio G F H tangente alle due rette date, e che si descriverà col raggio C F. I punti di contatto G ed H si ottengono abbassando dal centro C le perpendicolari sulle linee A B e D E.

### XXXII. PROBLEMA — FIGURA 71.

*Tracciare una curva detta* Scozia *( Scotie ) fra le parallele A B e C D, e che le tocchi nei punti A e C.*

*Soluzione.* Dai punti A e C, e da un terzo D preso ad arbitrio sulla C D, s'innalzino su queste parallele le perpendicolari A E, C O, e B D; si divida quest'ultima in tre parti eguali; pel primo punto di divisione N si conduca una parallela N E a B A, e dalla sua intersezione E con A E si descriva il quadrante A F. Si porti da E in G il terzo di E F; e dal punto G con la distanza G F, si tracci l'arco indefinito F H sul quale si segnerà una parte eguale alla metà di A F; si congiunga H G,

si porti il quarto di questa retta da G in I, centro dell'arco H K che si traccerà con la lunghezza I H per raggio; prendendo infine C L eguale ad I H, s'innalzerà sul punto medio di I L la perpendicolare M O, la cui intersezione con O C darà il centro dell'arco C K che terminerà la scozia.

### XXXIII. PROBLEMA — FIGURA 72.

*Costruire una curva analoga alla precedente, tangente in A ed in C alle parallele A B e C D.*

*Soluzione.* Si congiunga A C, su questa retta, come diametro, si descriva una semi-circonferenza A F C; s'innalzino su di essa tante perpendicolari quante se ne giudicheranno necessarie; poi pe' punti H, E, M, ec. si tirino delle parallele H K, E G ec., alle rette date; si prenda in fine H K eguale ad I H, E G eguale ad E F ec.; si avranno tutti i punti K, G, L ec., pei quali si farà passare una curva che sarà tangente alle due linee date.

### XXXIV. PROBLEMA — FIGURA 73.

*Tracciare una serie di archi di cerchio, formanti una curva continua.*

*Soluzione.* Essendo conosciuto il centro del primo arco B C, dal punto D preso sul prolungamento del suo raggio C A si descriva il secondo arco C E, che si terminerà per esempio in E

Avendo tirato e prolungato E D, da un punto F scelto su questa retta e con un raggio F E, si descriva ancora l'arco E G limitato in G. Si potrà così continuare la curva con altri archi di cui si assegneranno i centri H, I, ec.

### XXXV. PROBLEMA — FIGURA 74.

*Essendo dati tre punti A, B, C di un arco di cerchio il di cui centro è inaccessibile, descrivere questo arco.*

Dai punti B ed A come centri, e con A B per raggio, si descrivano gli archi A H, e B G; e le congiungenti A C e B C si prolunghino fino ad incontrare questi archi; si dividano gl'intervalli A F e B E in altrettante parti eguali, e si porti lo stesso numero di divisioni, meno una, sugli stessi archi, al di sopra di E ed al di sotto di F; si unisca in seguito il punto B al primo L preso al di sotto di F; si congiunga al contrario il punto A a quello I preso al di sopra di E; l'intersezione N sarà un punto dell'arco; le rette B M, ed A K daranno egualmente un secondo punto O. Si otterranno nella stessa guisa tanti punti quanti se ne desiderano. Se il punto C è nel mezzo di A C B, la perpendicolare C D abbassata sopra A B è la freccia dell'arco.

### XXXVI. PROBLEMA — FIGURA 75.

*Costruire un' Ellisse conoscendo i suoi due assi.*

L'ellisse è una curva chiusa, e tale che se si tirino da uno qualunque de'suoi punti, T per esempio, due rette T F e T F'

chiamati *raggi vettori*, diretti sopra due punti fissi F ed F' che si chiamano *fuochi*, la somma di queste due linee sarà costante, e sempre eguale ad A B.

Questa curva è simmetrica per rapporto a due linee A B e C D perpendicolari tra loro che si dividono in due parti uguali e che ne sono gli assi. Essa può essere tracciata, allorchè sono dati i suoi due assi, o i suoi fuochi e la lunghezza A B dell'asse maggiore.

*Prima soluzione.* Dopo aver tirata la retta A B eguale all'asse maggiore, sul suo punto medio E s'innalzi una perpendicolare, sulla quale si porteranno le lunghezze E C ed E D eguali ciascuna alla metà dell' asse minore dato. Fatto ciò, si determinino i fuochi descrivendo dal punto C o D, col semi asse maggiore per raggio, un arco di cerchio che tagli A B nei punti F, F'. Si prendano in seguito sull'asse maggiore A B de'punti ad arbitrio, come K, O ec.: indi coi centri F ed F' e coll' intervallo K A, si descrivano gli archi H I, ed M N; e col raggio K B, degli altri archi che taglieranno i primi in H ed in I, da una parte, ed in M ed in N dall' altra; e si avranno così quattro punti della curva. Si determineranno allo stesso modo dei nuovi punti facendo uso come raggi di altre porzioni di A B, come A O, B O. Se si faccia passare una curva per tutt'i punti ottenuti nella stessa guisa, si avrà l'ellisse domandata.

*Seconda soluzione.* (figura 76). Allorchè si saranno tracciati i due assi A B e C D, si segni un punto *a* sull'orlo di una

striscia di carta tagliata in linea retta, e si porti la lunghezza del semi-asse maggiore da *a* in *c*, e quella del semi-asse minore da *a* in *b*, in modo che *cb* esprima la differenza de' semi-assi. Preparata così la striscia, si situi il punto *b* sul grande asse, ed il punto *c* sul piccolo, la posizione di *a* darà un punto dell'ellisse. Se ne avranno tanti quanti se ne vorranno, avendo cura che il punto *b* sia costantemente sovra A B, ed il punto *c* sopra C D.

*Terza soluzione.* Un'altra fra le tante costruzioni dell'ellisse, può essere la seguente; Sull'asse maggiore A B (figura 77) e sul minore C D si costruiscano due circonferenze A H B, O R T; si divida la prima di queste circonferenze in un numero qualunque di parti A E, E F, F G ec.; i punti di divisione E, F, G ec., congiunti col centro X, daranno sulla seconda circonferenza O R T altrettanti punti di divisione, pe' quali, conducendo delle parallele all'asse maggiore, queste incontreranno le perpendicolari allo stesso asse *Em*, *Fn*, *Go* ec. nei punti *a*, *b*, *c* ec. che apparterranno all'ellisse.

L'ellisse può essere descritta eziandio con moto continuo come segue:

Prendasi un filo di lunghezza eguale all'asse maggiore A B dell' ellisse, e si fissino i suoi estremi ne'fuochi F ed F' (figura 78); indi con una matita si distenda questo filo; facendo scorrere questa matita in modo da tener sempre teso il filo, la traccia che lascerà col suo movimento sarà l'ellisse cercata.

## XXXVII. PROBLEMA — TAVOLA 5. FIGURA 79.

*Costruire con archi di cerchio una curva che rassomiglia all'ellisse.*

*Soluzione.* Dal punto C, ove gli assi s'incontrano, si descriva col raggio C D la circonferenza D F E; si tiri A E e si porti da E in G la differenza A F; poscia sul punto medio di A G s'innalzi la perpendicolare K H che incontrerà l'asse maggiore in H ed il minore in I; dal punto I, colla distanza IE per raggio, si descriva l'arco K E M, e dal centro H, con quella A H, l'arco K A L. Si fissino in seguito i punti I' ed H' col prendere C I' eguale a C I, e C H' eguale a C H; se da questi punti si descrivano gli archi L D N ed N B M, cogli stessi raggi I E ed A H, si completerà la curva. È utile però osservare che questa costruzione non si applica bene che quando gli assi differiscono poco l'un dall'altro.

## XXXVIII. PROBLEMA — TAVOLA 4. FIGURA 75.

*Tirare una tangente all'ellisse da un punto T dato sopra questa curva.*

*Soluzione.* Dopo aver tirati i due raggi vettori T F e T F', si prolungherà uno de'due al di fuori dell'ellisse; dopo, basterà dividere l'angolo *c* T F in due parti eguali colla linea T*d*, che sarà la tangente domandata.

### XXXIX. PROBLEMA — TAVOLA 4. FIGURA 76.

*Tirare delle tangenti all'ellisse dal punto T dato fuori della curva.*

*Soluzione.* Si descriva da questo punto T come centro, con un raggio eguale alla sua distanza dal fuoco più vicino F, una porzione di circonferenza K F L; dall'altro fuoco F', con l'asse maggiore per raggio, se ne descriva un'altra L K che taglierà la prima ai punti L e K, che si uniranno ad F' per mezzo di rette le cui intersezioni M ed N colla curva saranno i punti in cui le due tangenti che devono passare per T toccheranno l'ellisse.

### XL. PROBLEMA — TAVOLA 4. FIGURA 76.

*Tirare una tangente all'ellisse parallelamente alla retta Q R.*

*Soluzione.* Dal fuoco F, e con un raggio eguale all'asse maggiore, si descriva un arco di cerchio che incontrerà in H la perpendicolare abbassata da F' sulla retta data. Dal mezzo P di F' H si conduca una parallela a Q R, questa linea sarà la tangente alla curva.

Il punto di contatto O si otterrà tirando F H.

Si comprende che potrebbesi determinare così una seconda tangente parallela alla retta data, e che sarebbe diametralmente opposta.

## XLI. PROBLEMA — TAVOLA 5. FIGURA 80.

*Costruzione della Parabola.*

La parabola è una curva di cui tutt'i punti sono tanto lontani da una retta data, detta direttrice, quanto da un punto fisso dato, che si chiama fuoco. ( Si vedrà in seguito ch'essa provviene dalla sezione fatta in un cono retto da un piano parallelo ad una delle sue generatrici ).

Dietro questa definizione :

*Costruire una parabola per mezzo del suo fuoco F e della sua direttrice N E.*

1. *Soluzione.* Abbassando dal fuoco F la perpendicolare A B sulla retta data E N, si avrà l'asse della curva, ed il punto *c* medio di A F ne sarà il vertice. Si tiri in seguito dal punto F un numero indeterminato di rette F C, F D, F E ec.: sulla metà di ciascuna di esse s'innalzino le perpendicolari *a G, b* H, *c* I, e dai punti d'intersezione, C, D, E, della direttrice colle linee che partono dal fuoco si tirino parallelamente all'asse le rette C G, D H, E I che taglieranno le perpendicolari *a* G, *b* H, *c* I, ai punti G, H, I, appartenenti alla parabola.

2. *Soluzione* ( figura 81 ). Avendo ottenuto l'asse A F, si prenda un raggio qualunque per tracciare dal fuoco F la circonferenza D I E che taglierà questo asse in I; da questo punto collo stesso raggio si descriva una seconda circonferenza che incontrerà la direttrice ai punti G ed H, pei quali si condurranno

*

delle parallele ad A F; le intersezioni D ed E di queste linee col primo cerchio saranno due punti della curva. In questo modo si potrà determinare ogni altro punto.

Si avvertirà intanto che la circonferenza descritta con un raggio come F *a* maggiore della distanza A F, incontra l'asse in *a* a sinistra della direttrice, e che allora tirando dai punti *b*, e *d* ottenuti come quelli G ed H, delle parallele a quest' asse, esse taglieranno il cerchio *f a c* in quattro punti, di cui due solamente *f, c,* appartengono alla curva.

La distanza del fuoco alla direttrice potendo essere più o meno grande, sarà facile di accorgersi che i due rami simmetrici della curva saranno tanto più avvicinati l' uno all'altro, quanto più questa distanza sarà piccola.

**Può ancora la parabola descriversi con un moto continuo nel seguente modo.**

**Prendasi una squadra A B C (figura 82) di cui un cateto BC si faccia scorrere lungo la direttrice D D' della curva, ed un filo F A di lunghezza eguale all'altro cateto A B della squadra. Un estremo del filo sia fisso nel fuoco F, e l'altro estremo nel vertice A; indi con una matita si mantenga il filo A F sempre accosto al lato A B della squadra, obbligando questa a scorrere lungo D D'; la traccia che lascerà la matita darà la parabola richiesta**

## XLII. PROBLEMA — FIGURA 80.

*Tirare una tangente alla parabola da un punto T dato su questa curva.*

*Soluzione.* Si congiunga questo punto T col fuoco F, e si abbassi sulla direttrice E N la perpendicolare T N; dividendo l'angolo F T N in due parti uguali colla retta T M, questa linea, che si troverà perpendicolare sul mezzo F N, sarà la tangente cercata.

## XLIII. PROBLEMA — FIGURA 82.

*Tirare delle tangenti alla parabola da un punto T preso fuori di questa curva.*

*Soluzione.* Dal punto T dato e con un raggio eguale alla sua distanza dal fuoco, si descriva la circonferenza L F O; di poi pei punti L ed O, in cui essa taglia la direttrice D D', si tirino delle parallele all'asse A F, le loro intersezioni I ed N colla parabola saranno i punti di contatto delle tangenti a questa curva; congiungendo T I e T N si avranno le tangenti dimandate.

## XLIV. PROBLEMA — FIGURA 82.

*Tirare una tangente alla parabola parallelamente alla retta Q R.*

*Soluzione.* Si abbassi dal fuoco su questa retta la perpendicolare F P, fino all'incontro P colla direttrice D D'; da questo

punto tirata una parallela P S ad A F, essa taglierà la curva in S, che sarà il punto di contatto della tangente cercata: tirando in seguito per questo punto una parallela S K alla retta data Q R, il problema sarà risoluto.

A fine di completare questi pochi cenni dati dall'autore, intorno alle sezioni coniche, risolveremo alcuni problemi sull'iperbole, che egli soltanto accenna in prosieguo.

L'iperbole è una curva di cui ogni punto congiunto con due altri dati, che diconsi fuochi, si ha che la differenza di queste congiungenti, dette raggi vettori, è uguale ad una retta data ch'è l'asse trasverso della iperbole.

Per costruirla si operi come segue:

Siano F, F′ (figura 83) i due fuochi, dividasi la loro distanza F F′, chiamata eccentricità, per metà in O, punto che dicesi centro della curva. Taglinsi poi, a partire da O, due porzioni A O, O B uguali fra loro ed alla metà della retta data, la quale dev'essere minore della distanza F F′ dei fuochi: i punti A e B appartengono alla curva. Per ottenere nuovi punti, prendasi sulla O F ed a diritta del punto F′, un punto qualunque L; e da'punti F′ ed F come centri, e co'raggi A L e B L, si descrivano due circonferenze: i loro punti d'intersezione M ed M′ saranno due altri punti della curva. Reciprocamente da'punti F ed F′ come centri, e co'medesimi raggi, descrivendo due altre circonferenze, queste determineranno, colle loro intersezioni, altri due punti N ed N′ che eziandio appartengono alla curva. Prendendo ora un secondo punto L′ ed operando per rapporto ad esso come si è operato per L, si avranno altri quattro punti M″ ed M‴, N″ ed N‴; e così operando per rapporto ad un terzo punto L″ ec. si determineranno quanti punti si vorranno i quali congiunti con un tratto continuo daranno i due rami M″ M A M′ M‴; N″ N B N′ N‴ dell'iperbole.

Da questa costruzione apparisce chiaramente che l'iperbole è simmetrica intorno ad A B ed alla perpendicolare ad essa, O C; e che di più i suoi quattro rami si estendono all'infinito, potendosi i punti L, L', L'' ec. scegliere ad una distanza qualunque da F'. Dessa può eziandio costruirsi col dare i suoi due assi A B, C D. Il primo, come abbiamo detto, dicesi asse trasverso, perchè attraversa la curva; il secondo asse non trasverso. Ovvero il primo asse primario, il secondo asse secondario; o, come eziandio suol dirsi, il primo asse trasverso ed il secondo asse immaginario.

Sieno dunque A B e C D gli assi dati, si congiunga B D; e fatto centro O ed intervallo uguale a B D, descrivasi una circonferenza; questa intersecherà l'asse trasverso A B prolungato, ne'punti F ed F' che saranno i fuochi, i quali ottenuti, si opererà come sopra per la descrizione grafica della curva.

L'Iperbole può anche descriversi con un moto continuo. In fatti, essendo O (figura 84) il centro della curva da descriversi, prendasi un filo flessibile ed il meno che si possa elastico, ed una riga, tali però che sia lo eccesso della lunghezza della riga sul filo uguale all'asse trasverso; indi si situi un estremo della riga nel fuoco F, di guisa tale che possa intorno ad esso girare; finalmente si fissi l'estremo del filo nell'altro fuoco F', e si unisca l'altro termine della riga coll'altro del filo. Indi, facendo girare la riga in modo che per mezzo di uno stiletto il filo si mantenga sempre appoggiato ad essa, la punta di questo stiletto descriverà l'iperbole.

## XLV. PROBLEMA — FIGURA 85.

*Tirare una tangente all'iperbole pel punto N^iv dato su di essa.*

*Soluzione.* Tirinsi i raggi vettori N^iv F', N^iv F, si divida l'angolo F N^iv F' per metà colla Q P che sarà la tangente cercata.

## XLVI. PROBLEMA — FIGURA 85.

***Tirare la tangente all' Iperbole pel punto N dato fuori di essa.***

*Soluzione.* Si faccia centro F ed intervallo A B, e si descriva l'arco C D. Centro N ed intervallo N F', si descriva l'altro arco H K, si congiunga F K, e si prolunghi fino ad incontrare la curva in M: la M N sarà una tangente. Congiungendo in simil modo F con H, e prolungata questa fino ad incontrare la curva, il punto d' incontro unito con N darà una seconda tangente.

# DEFINIZIONI DI GEOMETRIA SOLIDA

Avendo premesse le definizioni elementari alle operazioni di Geometria nel piano, ora che veniamo a parlare di operazioni nello spazio, crediamo indispensabili le seguenti definizioni di Geometria solida:

Una linea retta A B (tavola 6 figura 1) è perpendicolare ad un piano P Q allorchè è perpendicolare a tutte le rette B D, B F, B E etc. che passano pel suo piede B e giacciono nel piano. Basta però che la retta risulti perpendicolare a due sole di quelle che passano pel suo piede, per essere perpendicolare a tutte le altre.

Una retta A B ed un piano P Q (figura 2) sono fra loro paralleli allorchè, prolungati da qualunque parte, non s'incontrano mai.

Due piani P Q ed M N (figura 3) sono paralleli se, comunque prolungati, non s'intersecano mai.

Angolo de' due piani P Q e Q R, o angolo diedro (figura 4), a simiglianza dell'angolo di due rette, è la quantità più o meno grande per la quale questi due piani son discosti l'uno dall'altro. Quest'angolo vien misurato dall'angolo M O N che formano fra loro le due rette tirate da un medesimo punto O della comune intersezione Q T, perpendicolarmente a quest'ultima e giacenti l'una nel piano P Q e l'altra nell'altro Q R. Angolo solido denominasi lo spazio angolare B C D A (figura 5) racchiuso fra più piani B A C, C A D, D A B che si riuniscono in un punto A, che chiamasi vertice dell'angolo solido. È chiaro che necessitano almeno tre piani per formare un angolo solido.

Chiamasi poliedro ogni solido terminato da più facce piane, come l'indica la figura 6.

L'intersezione B F delle due facce A F, e B G, chiamasi costola o spigolo.

Fra' poliedri ve ne sono vari che àn ricevuto nomi particolari, così tetrae-

dro è quel poliedro che à quattro facce piane; esaedro quello che ne à sei, ottaedro che ne à otto, dodecaedro che ne à dodici; icosaedro che ne à venti ec.

Poliedri regolari sono quelli di cui le facce sono poligoni regolari ed uguali, e tutti gli angoli solidi sono eguali fra loro.

Prisma vien detto un solido, come A B C D E F G H L M. (figura 7), costituito da più piani parallelogrammi come A B F G, F B C M ec. che ne compongono la superficie laterale o convessa, e da due poligoni uguali e paralleli come A B C D E, F G H L M che ne sono le basi.

La perpendicolare che da un punto qualunque della base superiore si abbassa sull'inferiore, chiamasi altezza del prisma, come la M N.

Prisma retto (figura 8) è quello che à le costole A B, C D, E F, perpendicolari alle basi B D F, A C E; se invece queste costole fossero inclinate alle basi, come nella precedente figura 7, il prisma si direbbe obbliquo.

I prismi distinguonsi in triangolari, quadrangolari, pentagonali, ec: secondo che le basi sono triangoli, quadrilateri, pentagoni ec. Così A C E B D F (figura 8) è un prisma triangolare; ed A B C D E F G H L M (figura 7) è un prisma pentagonale ec.

Fra' prismi distinguesi il parallelepipedo, che è un prisma quadrangolare avente per basi due parallelogrammi. Così A B C D E F G H (figura 9) è un parallelepipedo. Se tutti i sei parallelogrammi che compongono il parallelepipedo fossero rettangoli, esso acquisterebbe il nome di parallelepipedo rettangolo. Se in vece le sue sei facce fossero dei quadrati, il parallelepipedo si chiamerebbe cubo. Così per es: A B C D E F G H (figura 10) è un cubo.

Piramide chiamasi quel solido che è formato da varî piani triangolari come S A B, S A C, S C D ec: (figura 11), che partono da uno stesso punto S, e si arrestano a'lati di un poligono A B D C. I triangoli S A B, S A C, S C D ec: costituiscono la superficie laterale o convessa della piramide, il punto S ne è il vertice, ed A B D C la base.

Altezza di una piramide è la perpendicolare S M, che dal vertice si abbassa sulla base, prolungata se occorre.

Le piramidi, a somiglianza de' prismi, si distinguono in triangolari, quadrangolari, pentagonali ec: secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono ec. Così S A B C (figura 12) è una piramide triangolare, S A B D C (figura 11) n'è un'altra quadrangolare ec.

Piramide regolare vien detta quella che à per base un poligono regolare, e per la quale si verifica che l'altezza passa pel centro della base. Quest' altezza in tal caso dicesi asse della piramide.

Diagonale di un poliedro qualunque dicesi quella retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti, come la retta B H (figura 9).

Sfera è un solido A B C (figura 13) terminato da una superficie curva di cui tutt' i punti sono equidistanti da un punto O interno che n'è il centro.

Questo solido può essere generato da un semicerchio A B C che roti intorno al diametro A C.

Raggio della sfera è ogni retta che parte dal centro e si arresta alla superficie sferica, come le rette O D, O E ec.

Diametro è ogni retta che passa pel centro ed è terminata da ambo le parti dalla superficie sferica come A C.

Segando una sfera con un piano, si à che la sezione è sempre un cerchio. Ora fra' diversi cerchi che possonsi avere segando una sfera, si distinguono col nome di circoli massimi quelli che nascono quando il piano segante passa pel centro, e si dà il nome di circoli minori a quelli che vengono prodotti da qualunque altro piano. Così nella sfera A B C D, A M C N è un circolo massimo, ed *a m c n* n'è uno minore.

Triangolo sferico chiamasi quella porzione della superficie sferica rinchiusa fra tre archi di cerchio massimo; ed in generale poligono sferico è quella porzione di superficie sferica terminata da più archi di cerchi massimi.

I triangoli sferici diconsi equilateri, isosceli, scaleni secondo che (a simiglianza de' triangoli rettilinei) i tre lati sono fra loro eguali, ovvero due soli sono eguali fra loro, o tutti i lati sono disuguali.

Per angoli di un triangolo sferico s'intendono gli angoli che i piani dei loro lati formano fra loro.

Fuso dicesi una porzione di superficie sferica compresa fra due semicircoli massimi, che terminano ad uno stesso diametro; così A B C M è un fuso.

Cuneo o *unghia* sferica dicesi quella parte del solido della sfera compresa fra' piani di due circoli massimi, che si arrestano ad uno stesso diametro; e avente per base la superficie del fuso.

Piramide sferica è quella porzione di solido della sfera compresa fra i piani di un angolo solido avente il suo vertice nel centro della sfera, e di cui la base è un poligono sferico.

Zona sferica dicesi quella porzione di superficie sferica compresa fra due piani paralleli A M C N, ed *a m c n* che ne sono le basi. Se uno di questi piani fosse tangente alla sfera la zona si chiamerebbe calotta. Intendendo per piano tangente alla sfera quello che ha con essa un sol punto comune.

Segmento sferico è quella porzione di solido della sfera compresa fra due piani paralleli.

Altezza di una zona è la perpendicolare comune alle due basi.

Si chiama cilindro il solido generato dalla rotazione di un rettangolo A B C D (figura 14) intorno ad uno de' suoi lati B C. Il lato fisso B C chiamasi asse del cilindro, il lato opposto ad esso A D genera la superficie convessa o laterale del cilindro, ed i rimanenti due lati A B, C D generano, com' è chiaro, due cerchi, che sono le basi del cilindro A F.

Si dice cono quel solido generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo A B C (figura 15) intorno ad uno de' suoi cateti B C. Il cateto fisso B C è l'asse del cono, l'ipotenusa A B ne genera la superficie convessa, ed il rimanente lato A C genera la base del cono A E D B.

L' ipotenusa A B generatrice della superficie laterale si chiama lato od *apotema* del cono, ed il punto B n'è il vertice.

Prisma iscritto in un cilindro è quello di cui le basi sono poligoni inscritti nelle basi del cilindro. Così A B C D E F G H L M N O (figura 16) è un prisma iscritto nel cilindro A G M D.

Prisma circoscritto ad un cilindro è quel prisma di cui le basi sono poligoni circoscritti alle basi del cilindro. Così A B C D E F G H L M N O (figura 17) è un prisma circoscritto al cilindro P R Q S.

Due cilindri o due coni si dicono simili se i loro assi stanno fra loro come i diametri delle basi.

Due piramidi triangolari come S A B C (figura 18), *s a b c*, sono simili se ànno due facce S A B ed S A C simili rispettivamente alle due facce *s a b* *s a c*; se di più esse sono similmente poste, e se inoltre l'angolo che formano fra loro le due facce S A B ed S A C è eguale all'angolo delle altre due *s a b*, *s a c*.

## DEL METODO DELLE PROIEZIONI

Lo scopo generale del metodo delle proiezioni è quello di rappresentare la figura dei corpi suscettivi di definizioni esatte sopra superficie date di forma e di posizione. Nelle arti, le superficie sulle quali si fanno proiezioni sono piane, e per giungere a determinare rigorosamente un corpo dato, lo si rapporta a due piani perpendicolari tra loro i quali chiamansi *piani di proiezione*; così si suppone il corpo da rappresentarsi **A B C D H E I F** (tavola 6 figura 19) situato nello spazio compreso tra i due piani **O' P' L T** ed **L T M N**, di cui l' uno è orizzontale e l'altro verticale; essi s' incontrano secondo una retta **L T** alla quale si è dato il nome di *linea di terra*.

Le proiezioni tracciate sovra piani orizzontali si chiamano *proiezioni orizzontali*, o semplicemente *piani*, e quelle fatte sovra piani verticali si chiamano *proiezioni verticali* o *elevazioni*.

Quando è importante di far vedere l'interno di un oggetto come di una macchina, di una fabbrica, ec: la si suppone tagliata da un piano; allora la proiezione prende il nome di *sezione o taglio*, purchè però esprima nello stesso tempo le parti tagliate e quelle che non lo sono; quando non rappresenta se non che le parti tagliate dal piano, prende il nome di *profilo*. Infine la sezione vien detta *sezione verticale* o *orizzontale*, secondo che il piano segante è verticale o orizzontale. Si dà in generale il nome di disegni geometrici a tutte le proiezioni sovraddette.

Per rendere le operazioni delle proiezioni facili ad eseguirsi si suppone che le linee che partono dal corpo sieno delle rette parallele tra loro e perpendicolari ad ognuno de'piani di proiezione.

Così la proiezione del punto A (figura 19) sul piano orizzontale L T O' P' è il punto $a'$ piede della perpendicolare $A\ a'$ abbassata dal punto A su questo piano; e sul piano verticale L T M N, la proiezione dello stesso punto è $a$, ciò che determina completamente la posizione del punto considerato, poichè si vede che per ottenerlo bisognerebbe innalzare dai punti $a$ ed $a'$ delle perpendicolari su'piani di proiezione, l'intersezione di queste linee sarebbe il punto A cercato.

È evidente che per proiettare una retta bisogna avere le proiezioni di due de'suoi punti: proiettando dunque il punto B in $b$, e congiungendo $a$ con $b$, si avrà la proiezione verticale della retta A B, la quale si proietterà nella stessa maniera in $a'\ b'$ sul piano orizzontale.

Operando così per ogni altra linea, si potrà osservare che

le rette B E, ed A H, di cui le proiezioni orizzontali sono in $b'$ $e'$ ed $a'$ $h'$, si proiettano verticalmente ai punti unici $b$ ed $a$, perchè esse sono perpendicolari al piano verticale. Si osserverà ancora che ogni linea parallela ad un piano di proiezione si proietta su questo piano secondo una parallela a sè stessa, e per conseguenza la sua proiezione la fa vedere nella sua vera lunghezza; ecco perchè le due proiezioni della retta A B sono eguali a questa retta la quale si trova parallela ai due piani rettangolari; nel mentre la diagonale A C ch'è anche proiettata verticalmente secondo $a$ $c$ eguale a se stessa, non lo è già sul piano orizzontale, perchè essa è inclinata su questo piano; allora la sua proiezione orizzontale $a'$ $b'$, parallela alla linea di terra, la rappresenterà in iscorcio.

La linea C D la quale à la sua proiezione verticale in $c$ $d$ si proietta orizzontalmente sulla stessa retta $a'$ $b'$, e la linea E H ch'è proiettata in $e'$ $h'$ sul piano orizzontale, lo è in $a$ $b$ sul piano verticale. Ciò che porta a conchiudere che ogni piano perpendicolare ad uno de' piani di proiezione si proietta su questo ultimo secondo una sola linea. Per questa ragione si potrà dunque dire che tutt' i punti situati nel piano verticale si proietteranno orizzontalmente sulla linea di terra, e che tutt' i punti del piano orizzontale avranno le loro proiezioni verticali su questa stessa linea. Si riconosce ancora facilmente che se alcune rette sono parallele fra loro, le loro proiezioni sovra uno stesso piano sono anche parallele.

Dietro tutto ciò che abbiamo esposto è facile immaginare come il corpo dato vien rappresentato sul piano verticale dalla

figura $a\,b\,c\,d$, eguale d'altronde alla faccia A B C D, di cui n'è la proiezione, e sul piano orizzontale dalla figura $a'\,b'\,e'\,h'$ eguale alla faccia orizzontale superiore A B E H, e per conseguenza a quella inferiore che le è parallela.

Chiamasi traccia orizzontale o verticale di una retta il punto dove questa retta incontra il piano orizzontale od il verticale delle proiezioni.

Allorchè son date le proiezioni di una retta, è cosa ben facile il trovarne le tracce: infatti sieno (figura 20) $a\,b$, $a'\,b'$ le proiezioni di una retta; per trovare la sua traccia verticale, si prolunghi la sua proiezione orizzontale $a\,b$ finchè incontra la linea di terra in $m$; per $m$ s'innalzi la $mt'$ perpendicolare alla stessa linea di terra; il punto $t'$, dove la $m\,t'$ incontra la proiezione verticale $a'\,b'$, sarà la richiesta traccia verticale. Se invece si avesse voluto la traccia orizzontale della data retta, si sarebbe prolungata la sua proiezione verticale $a'\,b'$, fino ad incontrare la linea di terra; dal punto d'incontro $n$ si sarebbe innalzata la $n\,t$ perpendicolare ad $X\,Y$; l'intersezione $t$ di $n\,t$ con $a\,b$ sarebbe la cercata traccia orizzontale.

La ricerca delle tracce di una retta, oltre all'essere cosa interessantissima per la soluzione de' problemi di descrittiva, à in oltre il pregio di far facilmente immaginare la posizione della retta nello spazio.

Si chiama ancora *traccia orizzontale* o *verticale* di un piano la sua intersezione col piano orizzontale o verticale di proiezione; di maniera che se questo piano è perpendicolare ad uno di questi, la sua traccia su quest' ultimo ne sarà la sua proiezione intera, e rappresenterà nella direzione di una sola linea tutto ciò che fosse tracciato sul piano; e perciò la linea $a\,b$ (figura 19)

è la traccia e la proiezione della faccia A B E H perpendicolare al piano verticale.

Siccome nella pratica del disegno si opera su di un foglio di carta, le proiezioni suddette vi sono rappresentate nel prolungamento l'una dell' altra, e questo è ciò che si è espresso supponendo il piano L T O' P' ripiegarsi per prendere la posizione L T O' P'; allora le proiezioni di uno stesso punto si trovano sovra una stessa perpendicolare alla linea di terra, il che è indicato dalla figura 21, ove le stesse lettere corrispondono agli stessi punti della figura 19. Così $a$ ed $a'$ appartengono alla retta $a\,a'$ perpendicolare sulla L T, e la lunghezza $a\,i$ fa conoscere la distanza del punto dato al di sopra del piano orizzontale, mentre che $a'\,i$ indica la sua distanza al piano verticale. Quando si esamina un disegno bisogna rilevare col pensiero la parte superiore del foglio di carta di maniera che sia ad angolo retto sulla parte inferiore, e allora la linea di terra segna la direzione della piega.

*Osservazione*—Tutte le linee come H $a$, (figura 19) tracciate con una serie di trattolini separati da punti, indicheranno sempre delle linee di operazioni inservienti a costruire le differenti parti delle proiezioni del corpo che vuolsi rappresentare. Ed ogni linea, come F H, formata da una serie di punti lunghi, marcherà uno spigolo che non è apparente, ma che si vuole frattanto figurare per completare la rappresentazione del corpo o pure uno spigolo appartenente ad uno delle sue parti che si è soppresso, ma di cui vuolsene ancora far vedere la forma.

Quantunque spesso in un disegno la linea di terra non sia

tracciata, come per esempio sovra un foglio di carta il quale racchiude un gran numero di pezzi staccati, non bisognerà meno supporla esistere tra le proiezioni orizzontale e verticale di ciascun pezzo, poichè deve sempre esprimere la separazione di queste due proiezioni. (1).

Perchè gli allievi fossero più alla portata di figurarsi le proiezioni che spesso gl'imbarazzano da principio, sarebbe bene che avessero sotto gli occhi i rilievi di differenti solidi, come quelli che abbiamo presi per esempio. Intanto come non è sempre possibile di proccurarsene, ò creduto convenevole di rimpiazzarli con figure ombreggiate, consacrando a questo effetto la Tavola A sulla quale si trovano le proiezioni e le penetrazioni di tutti i corpi che siamo per considerare.

Per distinguere se una proiezione sia orizzontale o verticale, si è stabilito di porre lettere non accentate alle proiezioni orizzontali di una figura qualunque, e di marcare colle stesse lettere ma accentate le proiezioni verticali della stessa figura (2).

Nulla v'à forse di più interessante per un delineatore, quanto il sapere ben rappresentare le superficie; dappoichè, oltre all'esser questa una parte importante per sè stessa, v'è di più che dalla esatta rappresentazione delle superficie, non che da'piani tangenti ad esse, dipende la diversa maniera di

(1) In tutte le tavole che accompagnano questo testo, si è avuto cura di rappresentare i medesimi punti nelle diverse proiezioni di un corpo qualunque, colle medesime lettere segnate solamente da un accento ' (primo) e così da accenti $^{2}$, $^{3}$, ec., quando è bisognato esprimere alcuni punti molte volte.

(2) L'autore serba un metodo opposto.

tracciare quelle linee che all' uopo necessitano, e le quali tirate in un modo piuttosto che in un altro, aggiungono ad un disegno innumerevoli pregi.

È per questi motivi che noi c'impegniamo a dar idea della rappresentazione delle superficie; e per procedere con chiarezza ed ordine, daremo principio col dire che per superficie intender non devesi una serie di punti o di linee che fra loro non abbiano verun rapporto, ma bensì tutto ciò che può essere generato da una linea mobile che cangia di sito e di forma, secondo determinata legge; cioè che per ogni punto dello spazio, dev'essere pienamente determinata la forma e la posizione della linea mobile, la quale chiamasi *generatrice.*

Il mezzo più acconcio per determinare la legge del movimento, si è, per lo più, quello di costringere la generatrice ad appoggiarsi contemporaneamente ad una o più linee già date di sito e di forma, e che diconsi *direttrici*; sicchè per determinare una superficie bisogna dare la natura della generatrice, la legge del suo movimento, e le direttrici sulle quali deve scorrere la generatrice.

Bisogna in oltre osservare che una stessa superficie potendo essere generata da diverse generatrici, è mestieri scegliere, fra queste, quella di più facile rappresentazione, ed in oltre è ancor necessario che fra tutte le posizioni in che può esser questa generatrice si preferisca quella dalla quale rilevar si possa più facilmente e con maggior effetto la forma della superficie di cui è quistione. A queste condizioni soddisfano pienamente i così detti contorni apparenti, i quali altro non sono se non quelle linee che si ottengono circoscrivendo alla superficie data una superficie cilindrica di lati perpendicolari al piano sul quale si vuole il contorno apparente della data superficie: così volendosi p: es: il contorno apparente di una sfera sul piano orizzontale delle proiezioni, si circoscriverà ad essa una superficie cilindrica di cui i lati sieno perpendicolari al piano orizzontale delle proiezioni, e l'intersezione di

questo cilindro collo stesso piano, sarà la proiezione orizzontale del contorno apparente della sfera su quel piano.

Ciò posto, per rappresentare coi metodi che fornisce la *Descrittiva*, una superficie, basta assegnare in generale le proiezioni delle direttrici, quelle della generatrice in una sua posizione e la legge del movimento; che anzi per ottenere, siccome abbiam detto, maggior effetto, si sogliono assegnare i contorni apparenti della superficie, e varie posizioni intermedie della generatrice stessa; e v'è ancora di più, dappoichè fra tutte le possibili direttrici, ovvero linee che trovansi sulla superficie, si sogliono prendere a preferenza le tracce di essa superficie, le quali altro non sono che quelle linee secondo le quali la data superficie viene intersegata da' piani di proiezione, linee le quali diconsi tracce orizzontali o verticali secondo che trattasi dell'intersezione della data superficie col piano orizzontale o col verticale.

Veniamo ora alla generazione di alcune superficie, facendo nello stesso tempo vedere in che modo si rappresentano esse; e ciò per vie maggiormente chiarire quello che abbiamo fino ad ora detto in generale.

Superficie cilindriche chiamansi quelle che sono generate da una retta la quale si appoggia continuamente ad una data direttrice, e si mantiene sempre parallela ad una retta data, come vedesi nella Tavola 7 figura 22.

Da questa generazione si vede che una superficie cilindrica è determinata allorchè son date le proiezioni $m\,n\,p$, $m'\,n'\,p'$ della direttrice, e le proiezioni $a\,b$, $a'\,b'$ della retta cui si deve mantenere parallela la generatrice (figura 23); ma poichè così rappresentata essa non produce verun effetto artistico, bisogna trovare i suoi contorni apparenti; e prima di ciò è buono sostituire alle proiezioni della data direttrice, le tracce della superficie.

A far ciò per varî punti $m$, $n$, $p$ della proiezione orizzontale della direttrice si conducano le perpendicolari $m\,m'$, $n\,n'$, $p\,p'$ ec. alla linea di terra, e si prolunghino finchè incontrano la proiezione verticale nei punti $m'$, $n'$, $p'$, ec.

Dopo ciò, pe'punti $m, n, p$ ec. si tirino delle parallele alla proiezione orizzontale $a\,b$ della data retta, e pei corrispondenti punti $m', n', p'$, ec. si tirino delle parallele alla proiezione verticale $a'\,b'$ della stessa data retta; si avranno così le $m\,s$, $m'\,s'$; $n\,t$, $n'\,t'$; $p\,q$, $p'\,q'$ ec. che saranno due a due le proiezioni delle diverse posizioni intermedie della generatrice. Trovando le tracce orizzontali di tutte queste rette, ed unendole fra loro, si avrà la traccia orizzontale $e\,f\,g\,h$ della superficie; così pure le tracce verticali unite fra loro daranno la richiesta traccia verticale $e'\,f'\,g'\,h'$ come osservasi nella figura 22.

Di guisa che, date le proiezioni di una curva direttrice e quelle della retta alla quale debbonsi mantenere paralleli i lati della superficie, è cosa ben facile il trovar le tracce della stessa; e poichè la traccia di una superficie è una curva giacente sulla medesima, e che ha se stessa per una delle proiezioni, e di cui l'altra ricade nella linea di terra, così dare una sola traccia equivale a dare le proiezioni di una curva giacente nella superficie, ciò che, insieme alla retta generatrice, determina pienamente la posizione della richiesta superficie.

Sia dunque (fig. 24) A B D E la traccia orizzontale, ed $a\,b$, $a'\,b'$ la retta parallela alle generatrici; per ottenere i contorni apparenti di questo cilindro sui due piani di proiezioni, si tirino alla curva A B D E G le tangenti D$d$, G$g$ parallele alla proiezione orizzontale $a\,b$ della direzione delle generatrici, e saranno queste rette quelle che costituiscono il contorno apparente del cilindro, sul piano orizzontale delle proiezioni. Il contorno apparente sul piano verticale si ricava conducendo prima le A A', E E', tangenti alla traccia orizzontale, e perpendicolari alle linea di terra, indi per i punti d'incontro A' ed E' di queste rette colla linea di terra, tirando le A' $a'$, E' $e'$ parallele alla proiezione verticale $a'\,b'$ della direzione della generatrice, saranno queste A' $a'$ ed E' $e'$ le rette che costituiranno il contorno apparente del cilindro sul piano verticale delle proiezioni.

Questa rappresentazione, oltre all'essere la più acconcia per ciò che ri-

guarda parte artistica, ha il gran vantaggio di farci distinguere le parti della superficie che son vedute sui piani di proiezione da quelle che non lo sono, ciò che si determina facilmente nella maniera che segue:

Tutte le proiezioni orizzontali G *g*, A *a*, B *b*, ec. che partono da'punti G, A, B, ec. situati sulla parte G A B D della data traccia, siccome rette vedute, si marcheranno con un tratto continuo; tutte quelle che, come E *e*, partono da punti della porzione G E D ec. della stessa traccia orizzontale, siccome rette non vedute, si segneranno a puntini. Relativamente al piano verticale poi si osserverà che tutte le generatrici, come $B'$ $b'$, $D'$ $d'$ che si ottengono da punti come B, D, messi nella parte A B D E saranno vedute e quindi si disegneranno con un tratto pieno, quelle poi che son date da punti di A B D E G dall'altra parte della curva come la $G'$ $g'$ ec., perchè non vedute, saran segnate a puntini. Vi è una parte G H E della traccia orizzontale per la quale le generatrici non son vedute nè in proiezione orizzontale nè in proiezione verticale.

La diversità di linee tra punteggiate e continue è quella che in un disegno a contorni dà il massimo effetto possibile all'occhio di colui che è abituato al linguaggio della geometria descrittiva, dappoichè è in questo modo che alcune parti si vengono a collocare innanzi ad altre le quali inversamente vengono ad essere nascoste dalle prime.

In generale possiamo dire che il contorno apparente sul piano orizzontale divide l'intera superficie in due parti, l'una superiore, veduta, e l'altra inferiore, nascosta; e che parimenti il contorno apparente sul piano verticale divide la data superficie in due altre parti, l'una anteriore, veduta, e l'altra posteriore, non veduta; e che secondo questi diversi modi di vedere si deve regolare l'andamento delle linee.

Passiamo ora all'esame delle analoghe ricerche sulle superficie che diconsi coniche, e prima di tutto diciamo della loro definizione.

Superficie coniche in generale si dicono quelle generate da una retta la

quale essendo fissa in un punto, si appoggia continuamente ad una data curva (fig. 25); di guisa che a determinare pienamente nna superficie conica è mestieri dare le proiezioni del punto fisso o vertice, e quelle della curva direttrice.

Siano dunque S, S' (fig. 26) le proiezioni di esso vertice, ed *a b c d*, *a' b' c' d'* quelle della curva direttrice; per ottenere delle posizioni della generatrice, basta prendere sopra una delle proiezioni della curva data, p. es. sull'orizzontale, diversi punti come *a*, *b*, *c*, *d*, ec.; per essi condurre le *a a'*, *b b'*, *c c'*, *d d'* ec. perpendicolari alla linea di terra, finchè incontrino la proiezione verticale in *a'*, *b'*, *c'*, *d'* ec.; congiungendo poi S*a*, S*b*, S*c*, S*d* ec.; ed S' *a'*, S' *b'*, S' *c'*, S' *d'* ecc. si avranno le proiezioni delle diverse posizioni della retta generatrice.

Per determinare ora le tracce di questa superficie, si opererà in modo analogo a quello detto per la superficie cilindrica, cioè trovando le tracce orizzontali delle rette S *a*, S' *a'*; S *b*, S' *b'*; S *c*, S' *c'*; ec. ed nnendole fra loro si avrà la traccia orizzontale *e f g h* della superficie, e similmente trovando le tracce verticali e congiungendole fra loro, si avrà la traccia verticale *e' f' g' h'* della superficie stessa.

Di guisa che, date le proiezioni della direttrice e quelle del vertice si possono sempre trovare le tracce della superficie conica di cui si tratta, e perciò si potrà sostituire una di esse alle proiezioni della curva direttrice per le stesse ragioni date per il cilindro.

Sia dunque (fig. 27) A B C D E la traccia orizzontale della superficie, ed S S' le proiezioni del suo vertice; per trovarne i contorni apparenti sul piano orizzontale, si tirino per la proiezione orizzontale S del vertice, le tangenti SA ed SD alla data traccia orizzontale, le rette SA ed SD saranno le linee che costituiscono il richiesto contorno apparente snl piano orizzontale. Per avere ora l'altro sul piano verticale, si tirino le tangenti